# GA　よる　ュ　リスティック探索の最適化

仙　石　浩　明†　　吉　原　郁　夫†

与　られた　ュ　リスティック探索アルゴリズムに遺伝的アルゴリズム（Genetic Algorithm, GA）を組み込む汎用的手法を提案する．本手法では，探索木の分枝選択に優先順位を定め，これをGA で最適化する．従来人手で解かれていたような問題を計算機で解く場合，人手による手順を手続き化して，ヒューリスティック探索アルゴリズムを作ることは比較的容易である．しかし実問題に適用するには，より詳細にわたる知識の抽出が必須である．本手法に基づいてGA を組み込むことにより，少ない知識で質の高い解が得られる．本提案手法をバス仕業ダイヤ作成システムに応用し，実用上十分な仕業ダイヤ作成が可能となった．本システムはバス会社に導入され現在稼働中である．

## GA Based Optimization of Heuristic Search

Hiroaki Sengoku† and Ikuo Yoshihara†

We present a generic method adding GA (Genetic Algorithm) to a given heuristic search algorithm. In the method, GA is used to optimize the priority of branches in the search tree. Heuristic search algorithms are easy to develop and have been widely used to solve actual problems, which have been conventionally solved manually, but for practical applications, we have to add more detailed knowledge. The proposed method does not require so much knowledge due to using GA. We apply the method to bus driver scheduling systems, which can generate enough practical schedules. The systems are sold to bus corporations, and now working.

## 1. はじめに

遺伝的アルゴリズム（GA）[1] は，生物進化の過程をモデル化した解探索アルゴリズムである．探索に関する知識が不要なため作成が容易，問題の諸条件が変化しても柔軟に適応できる，探索が大域的である，などの長所を持つ．

このような長所がある反面，探索効率の点でヒューリスティック探索などの従来手法より劣る場合が多い．GA では，解の探索に関する知識を明示的には用いないためである．そこでGA にヒューリスティックスを併用することにより探索の効率向上を図り，工学的応用を図る研究[4),9)~11)] がさかんに行われている．

ところがいずれも問題領域に強く依存しており，タイプが異なる問題への応用は困難である．問題固有の知識を多用するあまり，交差方法を始めとする遺伝的操作が複雑化する傾向も見られる．さらに，効率向上に関する議論が各個別問題ごとに閉じており，他のGA 応用分野でそのノウハウを生かすことは難しい．

そこで，本論文ではヒューリスティック探索にGA を組み込む汎用的手法を提案する．与えられたヒューリスティック探索を，本論文で定義する形に変換できれば，容易にGA を組み込むことができる．組み込んだGA の部分は共通であり，問題とは独立して効率を論ずることができる．

ヒューリスティック探索の部分は問題個別に作成する必要があるが，従来人手で解かれていたような問題に関しては，人手でどのように解いていたかを整理して，ルールあるいは手続きの形で表現することができれば，比較的容易に探索プログラムを開発することができる．そして本提案手法に基づきGA を組み込むことによって，少ない知識で質の高い解を得ることが可能になる．

以下，2 章では，本論文であつかうヒューリスティック探索アルゴリズムの定義を行い，このアルゴリズムにGA を組み込む手法を3 章で提案する．4 章では，本提案手法の最適化の効率について考察し，5 章で巡回セールスマン問題（TSP）を例にとり提案手法を他手法と比較する．そして6 章で提案

† 株式会社日立製作所 システム開発研究所
Systems Development Lab., Hitachi Ltd.

手法を実問題（バス仕業ダイヤ作成）へ適用した例を報告する．

## 2. ヒュ リスティック探索

従来，多くの組合せ最適化問題が，ヒューリスティックを用いた探索を使って解かれてきた．つまり，解空間のすべてを探索することは組合せ爆発により非現実的であるので，ヒューリスティックによって，探索範囲を解がありそうな部分解空間に限定し，実用上十分な準最適解を見つける．

本章では，本論文で扱う組合せ最適化問題およびその解法であるヒューリスティック探索を定義する．既存のヒューリスティックを，ここで定義する形式に変換できれば，3 章で提案する手法により GA を組み込むことが可能である．

**定義 1** $M$ 個の互いに異なるアルファベットを $s_1, s_2, \ldots, s_M$ とする．このアルファベットの集合を $\Sigma$ とおく．
互いに異なるアルファベットの並びを $\sigma = s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_m}$ $(m \leq M)$ とし，空列を $\lambda$ とする．$\lambda$ および，すべての $\sigma$ からなる集合を $\Sigma^*$ とする．□

**定義 2（半順序）** $\sigma = s_{i_1}s_{i_2}\ldots s_{i_m}$，$\sigma' = s_{j_1}s_{j_2}\ldots s_{j_n}$ の間の半順序関係 $\prec$ を次のように定義する．

$$\sigma \prec \sigma' \iff m < n \ \wedge\ \forall k \leq m,\ s_{i_k} = s_{j_k}$$
$$\sigma \preceq \sigma' \iff \sigma \prec \sigma' \vee \sigma = \sigma'$$

□

$\forall \sigma \neq \lambda,\ \lambda \prec \sigma$ である．

**定義 3（組合せ最適化問題）** 組合せ最適化問題を 4 つ組 $(\Sigma, D, \overline{f}, \underline{f})$ で表す．ただし，

- $\Sigma = \{s_1, s_2, \ldots, s_M\}$
- $D \subset \Sigma^*$
- $\overline{f}:\ D \longrightarrow \mathrm{R}^+$（$\mathrm{R}^+$ は 0 および正の実数からなる集合）
- $\underline{f}:\ D \longrightarrow \mathrm{R}^+$

であり，$D, \overline{f}, \underline{f}$ は次の条件を満たすものとする．

- $\forall \sigma, \forall \sigma'$,
  $\sigma \prec \sigma' \wedge \sigma' \in D \Rightarrow \sigma \in D$
- $\forall \sigma \in D, \forall \sigma' \in D$,
  $\sigma \prec \sigma' \Rightarrow \underline{f}(\sigma) \leq \underline{f}(\sigma') \leq \overline{f}(\sigma') \leq \overline{f}(\sigma)$
- $\forall \sigma \in D, \exists \sigma' \in D$,
  $\sigma \preceq \sigma' \wedge \overline{f}(\sigma') = \underline{f}(\sigma')$ ……………………… (1)

$\overline{f}(\sigma) = \underline{f}(\sigma)$ を満たす $\sigma$ のうち，$\overline{f}(\sigma)$ を最小にする $\sigma$ を求める問題を，組合せ最適化問題と定義する．□

$D$ の要素を「部分解」と呼び，$\overline{f}(\sigma) = \underline{f}(\sigma)$ を満たす $\sigma$ を「解」と呼ぶ．解 $\sigma_t$ に対し，$\overline{f}(\sigma_t)$ を「評価値」と呼ぶ．評価値を最小にする解を「最適解」と呼ぶ．

たとえば TSP [12] において，都市をアルファベットとし，その並びを巡回経路に対応させると，評価値は巡回経路のコストであり，部分解はサブツアー（sub tour）である．サブツアーの端点に適切な都市を加えていくことにより解を生成できる．この場合，アルファベットの並びと巡回経路が直接一対一に対応しているが，複数のアルファベットの並びに対し 1 つの巡回経路が対応する多対一対応であってもよい（5 章参照）．つまり解 $\sigma_t$ に対し評価値 $\overline{f}(\sigma_t)$ が一意に定まる対応関係であればよい．

$\overline{f}(\sigma)$ は部分解 $\sigma$ の末尾にアルファベットを連接していくことにより生成可能な解のうち評価値が最小である解の評価値の上界を与え，$\underline{f}(\sigma)$ は下界を与える．多くの場合，上・下界の評価方法は改善の余地があるが，ここでは一般的に知られている評価方法あるいは容易に考案可能な評価方法について考える．

前述した TSP の例では，サブツアーに残りの都市を加えるすべての順列組合せを調べれば，部分解から生成可能な解の評価値の最小値，すなわち上・下限を求めることが可能であるが，これはしらみつぶし探索そのものであり現実的でない．一般的に知られている下界の評価方法としては，残りの都市それぞれの隣接都市までの距離を合計する方法等がある．

どの程度良い上・下界を求めることができるかは問題に依存する．実用的な計算量で十分に良い上・下界が得られる問題の場合は，ヒューリスティックを用いず，分枝限定法だけで効率良く解を求めることができるので，本論文では扱わない．多くの問題，特に実問題においては解の生成の途中で，良い上・下界を求めることは困難であり，探索空間を限定するためのヒューリスティックが必要となる．

次に，組合せ最適化問題 $(\Sigma, D, \overline{f}, \underline{f})$ を解くヒューリスティック探索アルゴリズムを定義する．この探索では，探索範囲を限定するため，最適解が得られるとは限らない．そこでこの探索範囲における最も良い解を「最良解」と呼ぶ．

**定義 4（ヒューリスティック探索）** 組合せ最適化問題 $(\Sigma, D, \overline{f}, \underline{f})$ を解く次のアルゴリズムをヒューリスティック探索と定義する．

**procedure** main {
  $x \leftarrow \infty$
  search$(\Sigma, \lambda)$
}
**procedure** search$(S, \sigma)$ { ………………… (2)

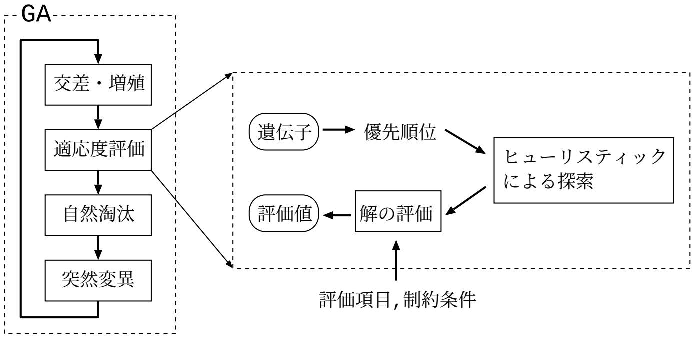


**図 1** GA によるヒューリスティック探索の最適化
Fig. 1 GA based optimization of heuristic search.

**if** $\overline{f}(\sigma) < x$ **then** {
  $x \leftarrow \overline{f}(\sigma)$
  **if** $\overline{f}(\sigma) = \underline{f}(\sigma)$ **then** {
    $\sigma_t = \sigma$
    **return**
  }
}
$S \leftarrow \{s \in S \,|\, \sigma \cdot s \in D \wedge \underline{f}(\sigma \cdot s) < x\}$ ……………………… (3)
$\{T \subset S$ を選択 $\}$ ……………………………… $(*)$
**for all** $s \in T$ **do** search$(S - \{s\},\ \sigma \cdot s)$
}

ただし，$x, \sigma_t$ は大域的変数，'$\cdot$' は連接演算子である．$\sigma_t$ に最良解が返される．

$(*)$ で選択した $T$ を，その探索局面における「選択枝集合」と呼ぶ．選択枝集合 $T$ は，ヒューリスティックに基づいて求める．すなわち解の性質に関する経験的知識を用いて，探索すべき枝を限定する．□

前述した TSP の例では，(3) の $S$（左辺）は次に訪問する都市の候補 $s$ のうち，サブツアー $\sigma \cdot s$ から生成される解の評価値の下界が $x$ より大きい都市を除いた集合である．一般に $S$ の要素数は多く，そのすべてを探索することは組合せ爆発により現実的ではない．そこで選択枝集合として，次に訪問するコストが一番小さい都市のみからなる集合を用いるヒューリスティックが最近近傍法（nearest neighbor method）である．しかしこの方法は明らかに選択枝集合が小さすぎ，良い解が得られないことが多い．

TSP の場合，選択した都市を次に訪問するのではなく，サブツアーの途中に挿入することにより効率を向上させることができる．つまりサブツアーの端点にではなく，挿入したときのコストの増分が最小である場所に挿入する方法が，挿入法（insertion method）である．挿入法において選択枝集合を求めるヒューリスティックとして，最近挿入法，最遠挿入法，最廉挿入法などがある（5 章参照）．

このように，TSP などの単純化された問題の場合は，簡単なヒューリスティックで効果的な探索が可能となるが，本論文で扱うような実問題（たとえば 6 章で報告するバス仕業ダイヤ作成問題など）の場合は，適切な選択枝集合を求めるには，問題に関する詳細な知識に基づく複雑なロジックが必要となる．

## 3. GA によるヒューリスティック探索の最適化

前章で定義したヒューリスティック探索に GA を組み込み，選択枝集合の求め方を最適化する手法を提案する．最適化された探索で最良解を求めることにより，組合せ最適化問題 $(\Sigma, D, \overline{f}, \underline{f})$ の準最適解を求めることができる．

本手法では，ヒューリスティック探索のアルファベットに全順序関係を導入し，この順序関係に基づいて選択枝集合を縮小する．全順序関係を定めるために各アルファベットに正整数を割り当てるが，この正整数を以下，優先順位と呼ぶ．

アルゴリズムの概要を**図 1** に示す．各個体の遺伝子からアルファベットの優先順位を求め，ヒューリスティック探索において優先順位を参照しながら最良解を生成する．そしてその最良解の評価値を個体の評価値とする．

### 3.1 遺伝子表現法

遺伝子は**図 2** に示す，要素数 $M$ の固定長ベクトルで，各要素 $q_i$ $(i = 1, 2, \ldots, M)$ は

$$1 \le q_i \le M - i + 1 \quad \cdots\cdots (4)$$

を満たす整数値である．このベクトルは，各アルファベットの優先順位を表す順序表現（Grefenstette による遺伝子表現法[2]）である．

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ | ------------ | $q_M$ |

$q_i$ : $1 \leqq q_i \leqq M - i + 1$
を満たす整数値

**図 2** 遺伝子
Fig. 2 Gene.

遺伝子 $\boldsymbol{q} = q_1 q_2 \cdots q_M$ からアルファベット $s_i$ の優先順位 $p(s_i)$ を求めるアルゴリズムを次に示す.

$P \leftarrow \{1, 2, \ldots, M\}$
**for** $i \leftarrow 1$ **to** $M$ **do** {
　$p(s_i) \equiv \begin{pmatrix} P\text{ の要素のうち，小さい方か} \\ \text{ら } q_i \text{ 番目の数字} \end{pmatrix}$
　$P \leftarrow P - \{p(s_i)\}$
}

明らかに，優先順位 $p(s_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, M)$ は互いに異なる 1 から $M$ までの数値となる.

### 3.2 適応度評価

定義 4 のヒューリスティック探索のアルゴリズムにおいて，最後の部分

　$\{T \subset S$ を選択 $\}$ ……………………… $(*)$
　**for all** $s \in T$ **do** search$(S - \{s\}, \sigma \cdot s)$
}

を次のように書き換えることにより，優先順位 $p(s_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, M)$ に基づく探索を行う.

　$\{T \subset S$ を選択 $\}$ ……………………… $(*)$
　$\{\forall s' \in T', \forall s \in (T - T'), p(s') < p(s)$ を
　　満たす $T' \subset T$ を選択 $\}$ ………… $(**)$
　**for all** $s \in T'$ **do** search$(S - \{s\}, \sigma \cdot s)$
}

$(**)$ において選択枝集合を縮小するので，$|T|$ は大きくてもよい．すなわち $(*)$ において $T$ を求めるヒューリスティックは，簡単なものでよい.

$|T'|$ が大きいほど，ヒューリスティック探索による局所探索の比重が大きくなるが，組合せ爆発が起きる可能性も高くなる．$|T'|$ が小さいほど GA による最適化の比重が高くなる．$|T'| \equiv 1$ の場合は，探索木の枝分れがない探索となり，$T$ の求め方によらず組合せ爆発が起きることはない.

個体の遺伝子にコーディングされた優先順位に基づく探索によって得られる最良解の評価値をその個体の評価値とし，評価値の逆数を適応度とする.

### 3.3 自 然 淘 汰

個体集合から $R$ 個（定数）の個体を取り除く．このとき，個体集合の多様性を維持するために[4]，次のように行う．まず適応度が高い順に個体を並べる．適応度が高い方から順に個体の適応度を調べ，直前の個体の適応度との差が $\epsilon$ 以下である個体をすべて取り除く．ただし取り除く個体数は $R$ 個までとする．取り除いた個体数を $r$ とする．$r < R$ の場合は，$R - r$ 個の個体を適応度が低い方から順に取り除く.

### 3.4 突 然 変 異

最優良個体を除くすべての個体の遺伝子の $q_i$ $(i = 1, 2, \ldots, M)$ の値を確率 $P$（定数）で，ランダムに選んだ値 $(1 \sim M - i + 1)$ に書き換える．1 つ以上の $q_i$ を書き換えた個体は，評価値および適応度を再計算する必要がある.

### 3.5 交差・増殖

交差は一点交差法を用いる．すなわち，親個体の遺伝子 $\boldsymbol{q} = q_1 q_2 \cdots q_M$，$\boldsymbol{q}' = q'_1 q'_2 \cdots q'_M$ に対して，$1 \leq r \leq M - 1$ を満たす乱数 $r$ を生成し，子個体の遺伝子 $q_1 q_2 \cdots q_r q'_{r+1} q'_{r+2} \cdots q'_M$ を作る．このとき，$r$ を交差点と呼ぶ.

ランダムに $R$ 組の親個体を選んで交差を行い，個体数を $R$ 個増やす．自然淘汰において個体数が $R$ 個減るので，世代間で個体数は一定である.

## 4. 最適化の効率

一般に，GA による組合せ最適化問題の解法の効率は，次の 3 点に大きく左右される[2)~6)].

- 親個体の形質が子個体の形質に忠実に遺伝すること
- 致死遺伝子が生じないこと
- 最適解が探索範囲に含まれること

従来の GA による解法の多くは，問題に強く依存している．そのため問題ごとに上記 3 点を満たすような，遺伝子コーディング法および交差方法等を考案する必要がある.

本提案手法においては，GA の部分は問題によらず共通であり，以下考察するように上記 3 点を満たす．新しい問題へ応用を試みる場合は，ヒューリスティック探索を定義 4 の形に変換しさえすれば，上記 3 点を満たす GA による解法を構成することができる.

### 4.1 表現形質の遺伝

親個体の形質が子個体にどのくらい忠実に遺伝するかが，GA による探索効率を左右する．すなわち交差によって子個体に引き継がれた遺伝子の表現形質が，親個体の表現形質と類似していなければ，ランダム探索程度の効率しか示さない.

たとえば，TSP の解法において，親個体の形質をほとんど遺伝しない Grefenstette の解法[2)] と形質の遺伝を重視した解法では，後者の解法の方がはるかに早く良い解が求めることができると報告され

ている[3),4)]．さらに我々は，形質の遺伝を重視した解法は，局所最適解からの脱出能力が，Simulated Annealing（SA）法より勝るという実験結果を得ている[5)]．したがって本論文で提案する手法も形質の遺伝を重視したものである．

本提案手法では，選択枝集合から要素を選択することを繰り返すことにより表現形質を生成する．つまり，表現形質は次に定義する選択子から構成される．

**定義 5（選択子）** 選択枝集合 $T$ および，遺伝子 $\boldsymbol{q}$ の優先順位によって縮小した選択枝集合 $T' \subset T$ に対して，選択子 $\boldsymbol{t} = t_1 t_2 \cdots t_M$ ($t_i \in \{0, 1, *\}$) を定義する．ただし，

$$t_i = \begin{cases} 1 & (s_i \in T' \text{のとき}) \\ 0 & (s_i \in T - T' \text{のとき}) \\ * & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

である．このとき選択子 $\boldsymbol{t}$ は，遺伝子 $\boldsymbol{q}$ に「含まれる」といい，$\boldsymbol{t} \sqsubset \boldsymbol{q}$ で表す．□

遺伝子は，多数の選択子を圧縮して表現したもの，と見なすことができる．

**補題 1** 遺伝子 $\boldsymbol{q} = q_1 q_2 \cdots q_M$ および $\boldsymbol{q}$ に含まれる選択子 $\boldsymbol{t} = t_1 t_2 \cdots t_M$ に対して，$t_1 = t_2 = \cdots = t_r = *$ ならば，$\boldsymbol{t} \sqsubset q'_1 q'_2 \cdots q'_r q_{r+1} q_{r+2} \cdots q_M$ ($q'_i$ は任意)．□

**証明**： $\boldsymbol{t}$ に対応する選択枝集合を $T$ とする．$t_1 = t_2 = \cdots = t_r = *$ であるならば，定義 5 より

$$s_1, s_2, \ldots s_r \notin T \quad \cdots\cdots \quad (5)$$

$Q = \{p(s_1), p(s_2), \ldots, p(s_r)\}$ とおくと，$s_{r+1}$, $s_{r+2}, \ldots, s_M$ の優先順位は，

$P \leftarrow \{1, 2, \ldots, M\} - Q$
**for** $i \leftarrow r + 1$ **to** $M$ **do** {
　$p(s_i) \equiv \left(\begin{array}{l} P \text{ の要素のうち，小さい方か} \\ \text{ら } q_i \text{ 番目の数字} \end{array}\right)$
　$P \leftarrow P - \{p(s_i)\}$
}

で求められるので，$p(s_{r+1}), p(s_{r+2}), \ldots, p(s_M)$ の間の大小関係は，$Q$ に依存しない．

したがって，(5) より $T$ に含まれるアルファベットの優先順位の間の大小関係は，$q_1 q_2 \cdots q_r$ の値に依存しない．ゆえに，$\boldsymbol{t} \sqsubset q'_1 q'_2 \cdots q'_r q_{r+1} q_{r+2} \cdots q_M$．□

順序表現は，Grefenstette の TSP の解法[2)] において形質が遺伝しないことが知られているが，本提案手法の選択子は，順序表現された優先順位の大小関係のみに依存するため，補題 1 に示したように子個体に引き継がれる．

**補題 2** 遺伝子 $\boldsymbol{q} = q_1 q_2 \cdots q_M$ および $\boldsymbol{q}$ に含まれる選択子 $\boldsymbol{t} = t_1 t_2 \cdots t_M$ に対して，$t_{r+1} = t_{r+2} = \cdots = t_M = *$ ならば，$\boldsymbol{t} \sqsubset q_1 q_2 \cdots q_r q'_{r+1} q'_{r+2} \cdots q'_M$ ($q'_i$ は任意)．□

**証明**： $\boldsymbol{t}$ に対応する選択枝集合を $T$ とする．$t_{r+1} = t_{r+2} = \cdots = t_M = *$ であるならば，定義 5 より

$$s_{r+1}, s_{r+2}, \ldots s_M \notin T \quad \cdots\cdots \quad (6)$$

$p(s_1), p(s_2), \ldots, p(s_r)$ は明らかに $q_{r+1} q_{r+2} \cdots q_M$ の値に依存しないから，(6) より $T$ に含まれるアルファベットの優先順位の間の大小関係も，$q_{r+1} q_{r+2} \cdots q_M$ の値に依存しない．ゆえに，$\boldsymbol{t} \sqsubset q_1 q_2 \cdots q_r q'_{r+1} q'_{r+2} \cdots q'_M$．□

補題 1，2 より，次の定理が導かれる．

**定理 1** 選択子 $\boldsymbol{t} = t_1 t_2 \cdots t_M$ は，交差点 $r$ に対し，$t_1 = t_2 = \cdots = t_r = *$ または $t_{r+1} = t_{r+2} = \cdots = t_M = *$ であるならば，交差によって生成された子個体に引き継がれる．□

つまり，選択子の非「$*$」要素が，交差点の両側に分断されなければ，選択子は子個体に引き継がれる．したがって，選択子の両端の非「$*$」要素を除いたときの長さが短い選択子ほど，交差によって破壊される確率が小さい．

以上より，同じ選択枝集合に含まれるアルファベットが互いに近接するように遺伝子を構成すれば，選択子が破壊される確率が小さくなり，より忠実に形質が遺伝する．　…………　(7)

### 4.2 致死遺伝子

致死遺伝子が多数生じる交差方法は，探索にとって無駄な個体を生成することになる．

**補題 3** 3.5 節の交差によって生成される子個体から優先順位を求めることがつねに可能である．□

**証明**： 遺伝子は優先順位を表す順序表現であるから明らか．□

**補題 4** 任意の優先順位に対して，優先順位に基づくヒューリスティック探索によって解が求まる．□

**証明**： 定義 4 のヒューリスティック探索の (3) より，任意の $s \in T$ に対して，$\sigma \cdot s \in D$. 定義 3 の (1) より $\sigma \cdot s \prec \sigma_t$ を満たす解 $\sigma_t$ が存在するから，選択枝集合のどのアルファベットを選んだ場合も，解が求まる．すなわち，どのような優先順位に対しても，解が求まる．□

補題 3，4 より，次の定理が導かれる．

**定理 2** 3.5 節の交差によって致死遺伝子が生じることはない．□

### 4.3 探索空間

GA は確率的探索法であるので，最適解が求まる保証はないが，最適解あるいは実用上十分良い解が探索範囲に含まれる必要がある．ヒューリスティック探索の探索範囲に最適解あるいは実用上十分良い解が含まれるならば，提案手法により GA を組み込んだ解法の探索範囲にも含まれることを以下に示す．

定義 4 のヒューリスティック探索アルゴリズムの (2) で $\sigma$ がとりうる値の集合と，解集合との積集合を $U$ とおく．$U$ は，探索する解の集合である．遺伝子 $\boldsymbol{q}$ の適応度を求める（3.2 節）ときに探索する解の集合を $U_{\boldsymbol{q}}$ とおく．

**定理 3** ヒューリスティック探索の探索範囲を $U$ とし，遺伝子 $\boldsymbol{q}$ に対応する探索範囲を $U_{\boldsymbol{q}}$ とする．このとき，

$$\forall \sigma_t \in U,\ \exists \boldsymbol{q},\ \sigma_t \in U_{\boldsymbol{q}}$$

□

**証明：** $\sigma_t = s_{i_1} s_{i_2} \ldots s_{i_m}$ とおく．優先順位が

$$p(s_{i_j}) = j\ (j = 1, 2, \ldots, m) \quad \cdots\cdots (8)$$

である遺伝子は明らかに存在するから，これを $\boldsymbol{q}$ とおく．このとき，$\sigma_t \in U_{\boldsymbol{q}}$ が成立することを以下に示す．

定義 4 のヒューリスティック探索アルゴリズムの (2) で，$\sigma_n = s_{i_1} s_{i_2} \ldots s_{i_n}$ $(n = 0, 1, \ldots, m-1)$ である探索局面について考える．このとき $s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots, s_{i_n} \notin S$ であるから，選択枝集合 $T_{\sigma_n}$ は，$s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots, s_{i_n}$ を含まない．また，$\sigma_t \in U$ であるから $s_{i_{n+1}} \in T_{\sigma_n}$．

したがって，(8) より $T_{\sigma_n}$ に含まれるアルファベットの中で優先順位が最小となるものは $s_{i_{n+1}}$ である．ゆえに優先順位によって縮小した選択枝集合 $T'_{\sigma_n}$ は $s_{i_{n+1}}$ を含む．以下同様にして，$n = 0, 1, \ldots, m-1$ に対し，$s_{i_{n+1}} \in T'_{\sigma_n}$．

ゆえに，$\sigma_t \in U_{\boldsymbol{q}}$． □

最適解 $\sigma_{min}$ が $U$ に含まれるならば，定理 3 より $\sigma_{min} \in U_{\boldsymbol{q}}$ となる遺伝子 $\boldsymbol{q}$ が存在する．したがって最適解は探索範囲に含まれる．

## 5. 巡回セールスマン問題への適用

TSP は単純化された問題であり本論文が扱うような実問題ではないが，提案手法の効率を他手法と比較評価するため，例題として用いる．

**定義 6（TSP）** $n$ 個の都市の集合 $C = \{1, 2, \ldots, n\}$ とそれらの間のコスト $d(i, j)$ $(i, j \in C)$ が与えられたとき，すべての都市を重複なく訪れる経路 $O = c_1 c_2 \cdots c_n$ $(c_i \in C)$ のうち，コスト $\Sigma_{i=1}^{n} d(c_i, c_{i+1})$（ただし $c_{n+1} \equiv c_1$ とする）が最小になるものを求める問題を TSP と定義する． □

TSP の近似解法としてよく知られる手法に挿入法がある．挿入法のアルゴリズムを次に示す．

$O \leftarrow$ { 適当に選んだ 1 都市からなる経路 }
$S \leftarrow \{c \in C \mid c \notin O\}$
**while** $S \neq \phi$ **do** {
  {$c \in S$ を選択 } ………… (9)
  {$c$ を $O$ へ挿入 } ………… (10)
  $S \leftarrow S - \{c\}$
}

(10) において $O = c_1 c_2 \cdots c_m$ $(m < n)$ であるとすると，$c$ を挿入後の $O'$ は次のように求める．まず，$i = 1, 2, \ldots m$ それぞれについて，$c_i$ と $c_{i+1}$ の間に $c$ を挿入するときのコストの増分 $\Delta_i = d(c_i, c) + d(c, c_{i+1}) - d(c_i, c_{i+1})$ を求める．$\Delta_i$ が最小となる $i$ を選び，$O' = c_1 c_2 \cdots c_i c c_{i+1} \cdots c_m$ を作る．

挿入法では，(9) の $c$ の選び方が重要であり，次の 3 種のヒューリスティックが知られる．

**最近挿入法：** $O$ と $c$ との距離 ($d(c, t)$ $(t \in O)$ の最小値) が最小となる $c$ を選ぶ．

**最遠挿入法：** $O$ と $c$ との距離が最大となる $c$ を選ぶ．

**最廉挿入法：** コストの増分 $\Delta$ が最小となる $c$ を選ぶ．

いずれの方法も探索枝は 1 本のみである．(9) の $c$ の選択は，定義 4 の ($*$) に対応するから，3 章で提案した手法に基づき GA を組み込むことができる．

まず，選択枝集合 $T$ を十分大きくして最適解が探索範囲に含まれるようにする必要がある．そこで，選択枝集合として $S$，つまり残りの都市全部からなる集合を用いる．明らかに最適解は探索範囲に含まれる．なお，この評価実験では部分解から生成可能な評価値最小の解の上・下界の評価は行っていない．

次に優先順位に基づいて選択枝集合を縮小する (3.2 節)．ここでは $|T'| \equiv 1$ とした．すなわち，優先順位 $p(c_i)$ が最も小さい $c_i \in C$ を選び挿入することを繰り返して解を構成する．そして優先順位を GA で最適化する．

TSPLIB[13] の中から，アフリカの 96 都市を巡る TSP（Africa-Subproblem of 666-city TSP）およびヨーロッパの 202 都市の TSP（Europe-Subproblem of 666-city TSP）をベンチマークとして用いた．

提案手法に基づき挿入法に GA を組み込んだ解法（提案法）と，従来法で求めた解の評価値（巡回経路

**表 1**　従来法との比較（TSP）
Table 1　Compared with conventional methods (TSP).

| TSPLIB | | | アフリカ 96 都市 | | | | ヨーロッパ 202 都市 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 解法 | | 世代数 | 最良解の評価値 [km] 最小 | 平均 | 最大 | CPU [秒] | 最良解の評価値 [km] 最小 | 平均 | 最大 | CPU [秒] |
| 提案法 | | 100 | 55210 | 55847 | 56370 | 93 | 40571 | 40754 | 40948 | 444 |
| 遺伝なし | | 100 | 56370 | 56756 | 57133 | 64 | 41520 | 42081 | 42320 | 294 |
| | | 150 | 56218 | 56648 | 57001 | 97 | 41374 | 41942 | 42224 | 430 |
| 従来法 | 最近 | — | 62412 | 68890 | 74621 | 21 | 47477 | 48833 | 50302 | 389 |
| | 最遠 | — | 57686 | 61281 | 66004 | 21 | 43728 | 45850 | 49088 | 389 |
| | 最廉 | — | 65690 | 69105 | 70447 | 46 | 45646 | 46953 | 47632 | 914 |
| | 局所探索 | 100 | 55312 | 56347 | 57453 | 24 | 41563 | 42241 | 42955 | 107 |
| | | 400 | 55209 | 55938 | 57287 | 91 | 41125 | 41957 | 42847 | 408 |
| 最適解 | | | 55209 | | | | 40160 | | | |

試行回数: 30,　個体数: 100

長 [km]）を比較する．さらに，提案法において GA の遺伝を行わない場合（遺伝なし）と比較する．

従来法としては，上記 3 ヒューリスティック（最近，最遠，最廉），および GA と局所探索を併用した高速解法[4)]（局所探索）を取りあげる．

実験結果を**表 1** に示す．3 ヒューリスティック以外の手法は確率的求解法であるので，30 回実験を行い得られた解の評価値の最小値，最大値，平均をそれぞれ示した．3 ヒューリスティックは，最初に選択する 1 都市をすべての場合について探索し，得られた解の評価値の最小値，最大値，平均を示した．計算は HP-9000/735 を用いて行い，所要 CPU 時間 [秒] を示した．

提案法では，個体数 100，淘汰個体数 $R = 30$，突然変異率 $P = 0.5\%$ とし，100 世代までに得られた最良解の評価値を示した．「遺伝なし」では，子個体を親個体とは無関係にランダムに生成し，自然淘汰や突然変異を行わない．局所探索併用法では，提案法と同じ個体数とし，一世代ごとに 60 個体に対し局所探索として 2opt による解の逐次改善を $n \times (n-2)/10$ 回（$n$ は都市数）ずつ試みる．

提案法は，ヒューリスティックのみの場合よりつねに良い解を求めることができた．また，遺伝なしの場合より高速に優先順位の最適化を行うことができる．さらに，平均値で比較すると，局所探索を併用した方法より，高速に良い解を求めることができた．

## 6.　バス仕業ダイヤ作成への適用

提案手法を実問題に適用する．

### 6.1　仕業ダイヤ作成問題

**図 3** のようなバス運行ダイヤが与えられたとき，図中斜めの線分で表されたバスの運行に，運転手を割り当てる仕業ダイヤ（**図 4**）を作成する問題が仕業ダイヤ作成問題である．

仕業ダイヤ作成は，従来ほとんどのバス会社において人手で行っていたが，専門家が 3 カ月もかかるほど工数が大きい作業であり自動化が望まれていた．自動化によって工数削減および仕業ダイヤの質の改善が期待される．

バスダイヤ（図 3）において，横軸は時間であり，バスの運行が斜めの直線で表されている．たとえば，「野球場前」停留所を 6:50 に出発したバスは，「万台駅」停留所に 7:08 に到着することが読みとれる．「野球場前」から「万台駅」までのこのようなひと続きのバスの運行を，山ダイヤと呼ぶ．

バス仕業ダイヤ（図 4）において，横軸は時間であり，山ダイヤが線分で表される．各行は運転手を表し，同じ行にある山ダイヤすべてを運転することを表す．たとえば運転手「A」は，「恵（恵田町）」停留所から出発して，「及」,「恵」を通って「長」に至り，8:44 から 9:30 までは朝食休憩をとり，13:24「長」まで乗務することを表している．各運転手の勤務を仕業と呼ぶ．

仕業には，たとえば「午前」「中休」「長大」「午後」「パート」などの型があり，それぞれ勤務時間・運転時間の上限，食事休憩の有無などが定められている．さらに，運転が連続する場合，一定時間以内ごとに休憩をとる必要がある．また，停留所によっては，一定時間以上の駐車が禁止されている所があり，駐車時間が長い場合は最寄りの営業所等に回送しなければならない．

以上のような制約を満たしつつ，回送本数が少なく，かつ各運転手の労働時間のバランスがとれるように山ダイヤを割り当てる必要がある．

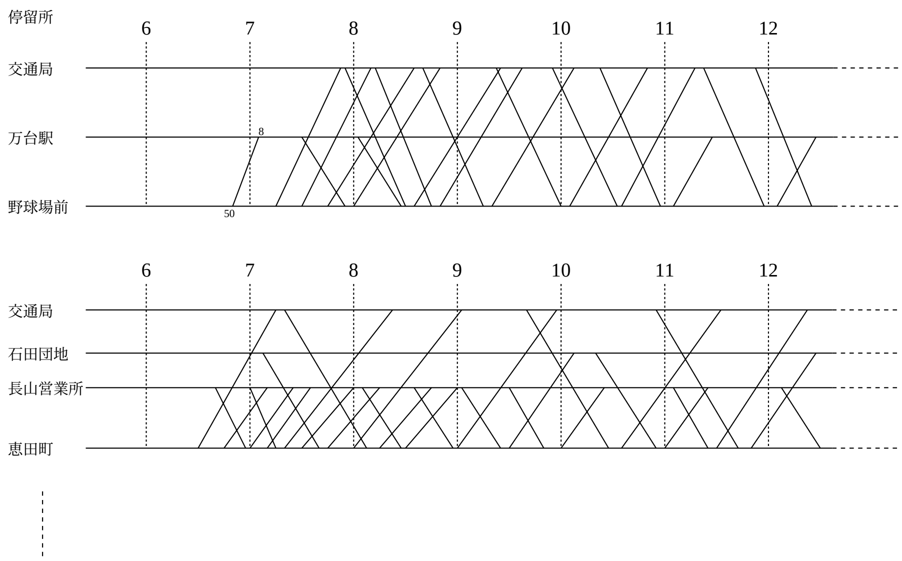


**図3** バスダイヤ
Fig. 3 Bus service diagram.

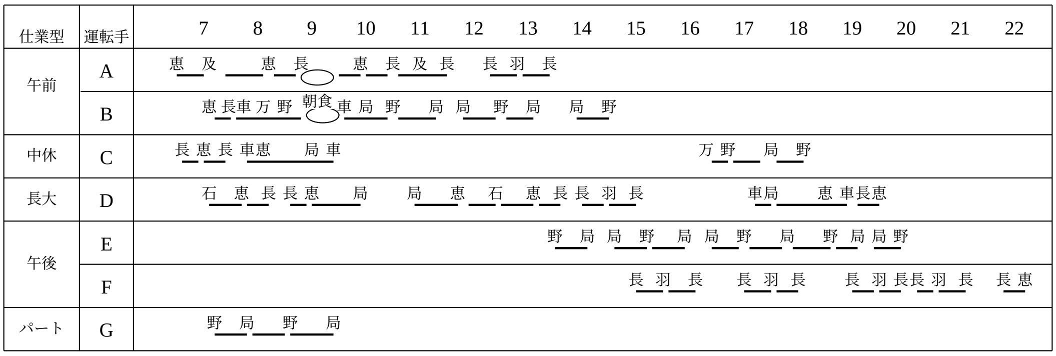


**図4** バス仕業ダイヤ
Fig. 4 Bus crew diagram.

### 6.2 GA による仕業ダイヤ作成

#### 6.2.1 ヒューリスティック探索による仕業ダイヤ作成プログラム

仕業ダイヤ作成を自動化するために，まず人手による仕業ダイヤ作成方法を参考にしながら，ヒューリスティック探索による仕業ダイヤ作成プログラムを作成した．

このヒューリスティック探索プログラムでは，山ダイヤを時刻順に並べた山ダイヤリスト

$Y = y_1 y_2 \cdots y_L$($y_i$: 山ダイヤ, $L$: 山ダイヤの数)

を定め，このリストの順に山ダイヤそれぞれに対し，運転手 $d_{j_i}$($j_i \in \{1, 2, \dots N\}$, $N$ は運転手の人数）を選ぶ．仕業ダイヤは

$$d_{j_1} d_{j_2} \cdots d_{j_L} \quad \cdots\cdots (11)$$

と表現できる．$20 < N < 200$，$100 < L < 1000$ 程度であるので組合せ爆発を起こす．したがって仕業ダイヤの探索の途中で枝刈りをすることが必須である．

しかし，仕業ダイヤは局所的な割当て変更が全体に影響を及ぼす．山ダイヤの出発時刻と到着時刻は固定で，割当ての一部を入れ換えるなどの融通がきかないからである．したがって，枝刈りにおいては仕業ダイヤ全体に注意を払う必要がある．また，各運転手に平等に休憩時間が与えられているか等は，全山ダイヤを割り当てた後でないと評価できないため，仕業ダイヤの作成の途中で中間評価を行うことが困難である．

中間評価のためのパラメータを試行錯誤で調節し，

組合せ爆発が起きない程度まで枝刈りを行って解を求めたが，仕業ダイヤの制約条件のすべてを満たすことは不可能であった．

#### 6.2.2　ヒューリスティック探索プログラムへの GA の組込み

仕業ダイヤは前節で述べたように，中間評価が困難であるので，generate and test 型である GA の活用が期待される．そこで，提案手法に基づき GA を組み込むことを試みた．

GA を組み込むには，前節のヒューリスティック探索を，定義 4 の形に変換すればよい．探索の処理の流れはおおむね同じであるが，(11) の表現法では，$N < L$ であるから $d_{j_i} = d_{j_{i'}}$ となる $i, i'$ が存在する．2 章で定義したように，組合せ最適化問題では，解は互いに異なるアルファベットの並びであることが必要である．

そこでアルファベットとして，運転手 $d_{j_i}$ の代わりに，山ダイヤ $y_i$ を割り当てる直前に $d_{j_i}$ に割り当てられた山ダイヤ $y_k$ を用いる．$d_{j_i}$ に割当済みの山ダイヤがない場合は，$d_{j_i}$ を用いる．つまりアルファベット $s_i$ を，

$$s_i = \begin{cases} d_i & (i \leq N \text{のとき}) \\ y_{i-N} & (i > N \text{のとき}) \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

と定義し，解 $\sigma_t$（仕業ダイヤ）を

$$\sigma_t = s_{k_1} s_{k_2} \cdots s_{k_L} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (13)$$

と表現すれば，定義 4 のヒューリスティック探索と同じ形になる．

そこで 3 章で提案した方法で，ヒューリスティック探索に GA を組み込んだ．すなわち，選択枝集合を十分大きくして，制約条件を満たす解が探索範囲に含まれるようにしたうえで，GA でヒューリスティック探索を最適化する．

解表現 (13) においては，運転手 $d_i$ と各運転手に直前に割り当てられた山ダイヤ $y_{i-N}$ からなる集合の部分集合が，選択枝集合である．各運転手に直前に割り当てられた山ダイヤは，多くの場合互いに時刻が近接しているので，選択枝集合は多くの場合，互いに時刻が近接した山ダイヤからなる．　…. (14)

山ダイヤリスト $Y = y_1 y_2 \cdots y_L$ は時刻順であり，また (12) における添字 $i$ の順に遺伝子上にコーディングされるので，時刻が近接している山ダイヤは，互いに遺伝子上で近接する．　………………… (15)

(14)，(15) および 4.1 節 (7) より，本手法では形質が忠実に遺伝する．

本手法により，すべての制約条件を満たすことが可能となった．バス会社 3 社の実際に運用している 6 路線について実験を行い，ダイヤ作成経験者に評価してもらったところ，いずれも満足するレベルの仕業ダイヤができているとの回答を得た．

## 7. おわりに

ヒューリスティック探索を GA で最適化する手法を提案した．この手法を用いることにより，2 章で定義した形式のヒューリスティックが知られている問題に，容易に GA を適用することができる．

TSP を例題として，ヒューリスティック探索のみの場合，および GA において遺伝を行わない場合と比較することにより，本提案手法の有効性を実証した．さらに局所探索に基づく高速解法[4] より平均で勝ることを示した．

実際のバス仕業ダイヤ作成へ適用したところ，ヒューリスティック探索のみでは不可能であった実行可能解の生成が可能になった．種々の規模のバス路線について実験を行い，いずれもダイヤ作成の専門家が妥当と判断する仕業ダイヤ生成に成功した．

この仕業ダイヤ作成プログラムはバスダイヤ編成システムに応用され，すでに実際のバス会社に導入され稼働している．システム開発担当者によれば，本プログラムは，以下の特徴を持つ．

- ヒューリスティック探索の部分は基本的なロジックのみで構成されているのでステップ数の増大を避けることができた．
- 特定のバス会社に依存した部分を持たないため，別のバス会社へのカスタマイズが容易であった．このことから保守性も良いと考えられる．

提案手法を実問題に適用することにより，枝刈りの調整を GA で自動化でき，開発工数の短縮や，プログラムが単純になることによる保守性の向上，などが期待される．

スケジューリング，レイアウト問題など，知識工学が応用されている分野は数多い．これらの分野に GA が応用できれば，詳細にわたる知識獲得が不要となる．本論文で提案した手法を用いることにより容易に GA の応用分野を拡大することができるものと期待される．

**謝辞**　実システム適用を推進していただいた（株）日立製作所 今川 徹三 部長，および日立東北ソフトウェア（株）捧 保浩 技師に感謝いたします．

## 参 考 文 献

1) Holland, J.H.: *Adaptation in Natural and Ar-*

*tificial Systems,* Univ. Michigan Press (1975).
2) Goldberg, D.E.: *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning,* Addison Welsley (1989).
3) 山村，小野，小林：形質遺伝を重視した遺伝的アルゴリズムに基づく巡回セールスマン問題の解法，人工知能学会誌，Vol.7, No.6 (1992).
4) 仙石，吉原：遺伝的アルゴリズムによる *TSP* の高速解法，第 46 回情報処理学会全国大会論文集 8D-4 (1993).
5) 仙石，吉原：遺伝的アルゴリズムの最適解探索能力に関する評価—*GA* と *SA* の比較—, 第 47 回情報処理学会全国大会論文集 (1993).
6) 北野（編）: 遺伝的アルゴリズム，pp.43–60, 産業図書 (1993).
7) 仙石，吉原，今川：*GA* によるヒューリスティック探索の最適化—バス仕業ダイヤの作成—, 情報処理学会数理モデル化と問題解決研究会研究報告 95-MPS-2 (1995).
8) 仙石，吉原，捧，今川：*GA* によるヒューリスティック探索の最適化—バスダイヤ編成システムへの適用—, 第 52 回情報処理学会全国大会論文集 (1996).
9) 半田，本位田：遺伝的アルゴリズムによる素子の整列配置，電気学会論文誌 C，Vol.115-C, No.4 (1995).
10) 田澤，小圷，平田：免疫機構を取り入れた遺伝的アルゴリズムの *VLSI* フロアプラン設計への応用，計測自動制御学会論文集，Vol.31, No.5 (1995).
11) 村田，石渕，田中：遺伝的アルゴリズムによるフローショップ・スケジューリングと多目的最適化問題への応用，計測自動制御学会論文集，Vol.31, No.5 (1995).
12) Lawler, E.L., Lenstra, J.K., Rinnooy Kan, A.H.G. and Shmonys, D.B.: *The Traveling Salesman Problem*, Wiley (1985).
13) Reinelt, G.: TSPLIB, ftp://softlib.rice.edu/pub/tsplib/tsplib.tar

(平成 7 年 10 月 6 日受付)
(平成 8 年 7 月 4 日採録)

**仙石　浩明**（正会員）

1966 年生．1990 年京都大学工学部情報工学科卒業．1992 年同大学院工学研究科情報工学専攻修士課程修了．同年（株）日立製作所入社．以来，システム開発研究所にて遺伝的アルゴリズムの研究に従事．

**吉原　郁夫**（正会員）

1969 年東京工業大学理工学部物理学科卒業，1971 年東京教育大学大学院理学研究科修士課程修了．1971 年（株）日立製作所入社，中央研究所を経て，現在システム開発研究所主任研究員．ビル防災，環境制御，数値計算，ニューラルネットワーク，遺伝的アルゴリズム応用の研究に従事．工学博士．計測自動制御学会，電気学会，日本応用数理学会，日本火災学会各会員．